Srednja mješovita škola „ Žepče“

Žepče

ŠKOLSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

ZA IV RAZRED

1. Dokaži da je, za sve nϵN, broj $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ djeljiv sa 7.

2. Članovi aritmetičkog niza su realni brojevi. Proizvod pet uzastopnih članova tog niza je 45, a njihov zbir je 5. Odrediti tih pet članova niza!

3. Provjeriti da li postoji prirodan broj n≥2 takav da vrijedi jednakost $\frac{(n-2)^2 \cdot n \cdot (n+1)!}{(n+2)!} = \binom{n}{2}$

4. Funkcija f(x) zadovoljava uslov

   $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$

   za sve xϵZ. Ako je f(1)=2, izračunati f(2000).

Mnogo uspjeha u radu!

Rješenja zadataka:

1. $2^{n+2} + 3^{2n+1} | 7$

   1° n = 1

   $2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35 = 5 \cdot 7$

   2° $PP\ za\ n = k$

   $2^{k+2} + 3^{2k+1} = 7p$

   3° n = k+1

$$\begin{aligned} 2^{k+1+2} + 3^{2(k+1)+1} &= 2^1 \cdot 2^{k+2} + 3^2 \cdot 3^{2k+1} \\ &= 2 \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 3^{2k+1} + 7 \cdot 3^{2k+1} \\ &= 2 \cdot 7p + 7 \cdot 3^{2k+1} = 7(2p + 3^{2k+1}) \end{aligned}$$

Zaključujemo da vrijedi ∀n ∈ N.

2. Članovi aritmetičkog niza su realni brojevi. Proizvod pet uzastopnih članova tog niza je 45, a njihov zbir je 5. Odrediti tih pet članova niza!

   $(a_1 - 2d)(a_1 - d)a_1(a_1 + d)(a_1 + 2d) = 45$

   $(a_1 - 2d) + (a_1 - d) + a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 5$

   $5a_1 = 5 \Rightarrow a_1 = 1$

   $(1 - 2d)(1 - d) \cdot 1 \cdot (1 + d)(1 + 2d) = 45$

   $(1 - 4d^2)(1 - d^2) = 45$

Ubacimo smjenu $d^2 = t$.

$$4t^2 - 5t - 44 = 0$$

$$t_1 = 4 \quad t_2 = -\frac{11}{4}$$

Negativno rješenje odbacujemo.

$$\mathrm{d} = \pm 2$$

Za $\mathrm{d} = 2$ članovi niza su -3, -1, 1, 3, 5.

Za $\mathrm{d} = -2$ članovi niza su 5, 3, 1, -1, -3.

3. $\frac{(n-2)^2 \cdot n \cdot (n+1)!}{(n+2)!} = \binom{n}{2}$

$$\frac{(n-2)^2 \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-2) \cdot (n-1)!} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

Sređivanjem posljednjeg izraza dobijemo kvadratnu jednačinu:

$$n^2 - 9n + 10 = 0$$

$$\mathrm{D} = 41$$

Zaključujemo da nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

4. $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$

$$\mathrm{f}(1) = 2$$

$$\mathrm{f}(2) = -3$$

$$\mathrm{f}(3) = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{f}(4) = \frac{1}{3}$$

$$f(5) = 2$$

$$f(6) = -3$$

Primijetimo da vrijedi:

$$f(5) = f(1) = 2$$

$$f(6) = f(2) = -3$$

$$f(n + 4) = f(n)$$

Izračunajmo sada $f(2000)$

$$f(2000) = f(1996) = f(1992) = \ldots = f(4) = \frac{1}{3}$$