Srednja mješovita škola „ Žepče“

Žepče

ŠKOLSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

ZA III RAZRED

1. Riješiti jednačinu
$$9 \cdot \log_{\sin 2x}(4cos^2 x) + 8 \cdot \log_{2\cos x} \sin x = 16$$

2. Riješiti nejednačinu
$$2^{2x} \leq 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} + 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}}$$

3. Odrediti $\log_a b$, $\log_{ab} b$, $\log_{ab^2} b$ i $\log_{ab^3} b$, ako je
$$\log_a b - \log_{ab} b = \log_{ab^2} b - \log_{ab^3} b$$

4. Pokaži da točka $M(x, y)$ sa koordinatama $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, y = b\,\frac{2t}{1+t^2}$ pripada elipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Mnogo uspjeha u radu!

Rješenja zadataka:

1. Riješiti jednačinu

$$9 \cdot \log_{\sin 2x}(4cos^2x) + 8 \cdot \log_{2\cos x} \sin x = 16$$

$$9\log_{2\sin x \cos x}(2\cos x)^2 + 8\log_{2\cos x} \sin x = 16$$

$$\frac{18}{\log_{2\cos x} 2\sin x \cos x} + 8\log_{2\cos x} \sin x = 16$$

$$\frac{18}{\log_{2\cos x} \sin x + 1} + 8\log_{2\cos x} \sin x = 16$$

Ubacimo smjenu $\log_{2\cos x} \sin x = t$.

$$\frac{18}{t+1} + 8t = 16$$

Rješavanjem posljednje jednačine po *t* dobijemo da je $t = \frac{1}{2}$.

$$\log_{2\cos x} \sin x = \frac{1}{2}$$

$$(2\cos x)^{\frac{1}{2}} = \sin x$$

$$\sqrt{2\cos x} = \sqrt{1 - cos^2x}$$

$$cos^2x + 2\cos x - 1 = 0$$

Smjena $\cos x = z$.

$$z^2 + 2z - 1 = 0$$

$$z_1 = -1 - \sqrt{2} \qquad z_2 = -1 + \sqrt{2}$$

$$x_1 = \arccos\left(-1 - \sqrt{2}\right) \qquad x_2 = \arccos\left(-1 + \sqrt{2}\right)$$

2. Riješiti nejednačinu

$$2^{2x} \leq 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} + 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}}$$

$$(2^x)^2 \leq 3 \cdot 2^x \cdot 2^{\sqrt{x}} + 4 \cdot \left(2^{\sqrt{x}}\right)^2$$
$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x \cdot 2^{\sqrt{x}} - 4 \cdot \left(2^{\sqrt{x}}\right)^2 \leq 0$$

Podijelimo prethodni izraz sa $(2^{\sqrt{x}})^2$ dobit ćemo

$$\left(\frac{2^x}{2^{\sqrt{x}}}\right)^2 - 3\frac{2^x}{2^{\sqrt{x}}} - 4 \leq 0$$

Smjena $\frac{2^x}{2^{\sqrt{x}}} = t$

$$t^2 - 3t - 4 \leq 0$$
$$t_1 = -1 \quad t_2 = 4$$

$$t \in [-1,4] \ \Rightarrow x \in [0,4]$$

3. Odrediti $\log_a b$, $\log_{ab} b$, $\log_{ab^2} b$ i $\log_{ab^3} b$, ako je

$$\log_a b - \log_{ab} b = \log_{ab^2} b - \log_{ab^3} b$$

$$\log_a b - \frac{\log_a b}{\log_a ab} = \frac{\log_a b}{\log_a ab^2} - \frac{\log_a b}{\log_a ab^3}$$
$$1 - \frac{1}{1+\log_a b} = \frac{1}{1+2\log_a b} - \frac{1}{1+3\log_a b}$$

Ubacimo li smjenu $\log_a b = t$ i riješimo jednačinu po t dobit ćemo da je

$t_1 = -\frac{2}{3} \qquad t_2 = 0$

$\log_a b = -\frac{2}{3} \qquad \log_a b = 0$

$\log_{ab} b = \frac{\log_a b}{\log_a ab} = \frac{\log_a b}{1+\log_a b} = -2$ ili $\log_{ab} b = 0$

$\log_{ab^2} b = \frac{\log_a b}{\log_a ab^2} = \frac{\log_a b}{1+2\log_a b} = 2$ ili $\log_{ab^2} b = 0$

$\log_{ab^3} b = \frac{\log_a b}{\log_a ab^3} = \frac{\log_a b}{1+3\log_a b} = \frac{2}{3}$ ili $\log_{ab^3} b = 0$

4. Pokaži da točka $M(x, y)$ sa koordinatama $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, y = b\frac{2t}{1+t^2}$ pripada elipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Uvrstimo koordinate u jednačinu elipse i dobit ćemo:

$$b^2\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + a^2\left(b\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = a^2b^2$$

$$\frac{b^2a^2(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} + \frac{a^2b^2(2t)^2}{(1+t^2)^2} = a^2b^2$$

$$\frac{a^2b^2(t^4+2t^2+1)}{(1+t^2)^2} = a^2b^2$$

$$\frac{a^2b^2(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = a^2b^2$$

$$a^2b^2 = a^2b^2$$